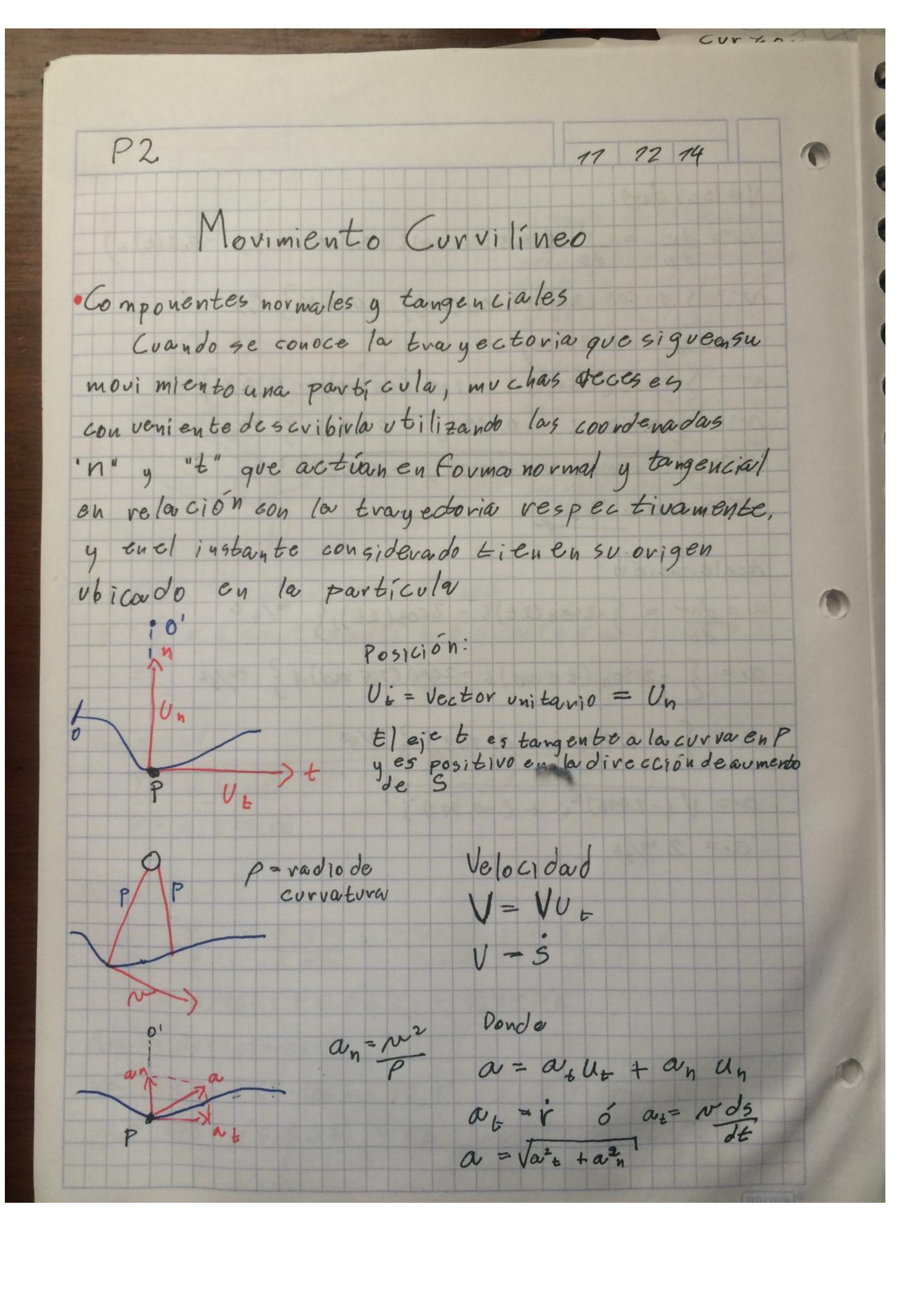


P2 | 11 12 14

Movimiento Curvilíneo

• Componentes normales y tangenciales

Cuando se conoce la trayectoria que sigue en su movimiento una partícula, muchas veces es conveniente describirla utilizando las coordenadas "n" y "t" que actúan en forma normal y tangencial en relación con la trayectoria respectivamente, y en el instante considerado tienen su origen ubicado en la partícula

Posición:

U_t = Vector unitario = U_n

El eje t es tangente a la curva en P y es positivo en la dirección de aumento de S

ρ = radio de curvatura

Velocidad

$V = V U_t$

$V = \dot{s}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$

Donde

$a = a_t U_t + a_n U_n$

$a_t = \dot{r}$ ó $a_t = v \frac{ds}{dt}$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Si la trayectoria se expresa como $y = F(x)$, el radio de curvatura en cualquier punto de la trayectoria se calcula a partir de la ecuación:

$$\rho = \left| \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \right|$$

g) Un automóvil de carreras recorre una pista circular horizontal que tiene un $r = 300$ pies. Si el auto aumenta su rapidez a cte $= 7$ pies/seg² desde el reposo, determine el tiempo para alcanzar $a = 8$ pies/s². $v_f = ?$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a_t = 7 \text{ pies}/s^2 \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho = 300 \text{ pies}$$

$$v = v_0 + (a_t)t = 0 + 7t$$

$$v = 7t$$

$$a_n = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163\,t^2 \text{ pies}/s^2$$

la aceleración que alcanza es de 8 pies/s²

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{(7)^2 + (0.163t^2)^2}$$

$$0.163t^2 = \sqrt{(8)^2 - (7)^2} \Rightarrow t = 4.87 \text{ seg}$$

$$v = 7t = 7(4.87) = 34.1 \text{ pies}/s$$

• Componentes Cilíndricas

En algunos problemas de ingeniería es conveniente expresar la trayectoria del movimiento de una partícula en términos de coordenadas cilíndricas r, θ y z. Si el movimiento se limita al plano, se emplean las coordenadas polares r y θ

Coordenadas polares

θ
v_θ
r
v_r
P
r
θ
O

Posición

Es posible especificar la ubicación de la partícula P, utilizando la coordenada radial "r" la cual se extiende hacia afuera desde el origen fijo "O" a la partícula, y una coordenada transversal "θ", que es el ángulo medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj entre una línea fija de referencia y el eje "r", por lo general el ángulo se mide en grados o radianes

Las direcciones positivas de las coordenadas "r" y "θ" se definen por medio de los vectores unitarios u_r y u_θ

Posición:

$$\mathbf{r} = r\,u_r$$

Velocidad:

$$v = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,u_r + r\,\dot{u}_r$$

$$v = v_r\,u_r + v_\theta\,u_\theta$$

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta}$$

La componente radial v_r es una medida del aumento o reducción en la longitud de la coordenada radial, es decir $\dot{r}$; es posible interpretar la componente transversal v_θ coma la rapidez de movimiento a lo largo de un círculo de radio r

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{Velocidad angular } ^{rad}/_{seg}$$

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + r(\dot{\theta})^2}$$

Aceleración

$$a = \dot{v} = \ddot{r}\,u_r + \dot{r}\,\dot{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,u_\theta + r\ddot{\theta}\,u_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{u}_\theta$$

$$a = a_r\,u_r + a_\theta\,u_\theta$$

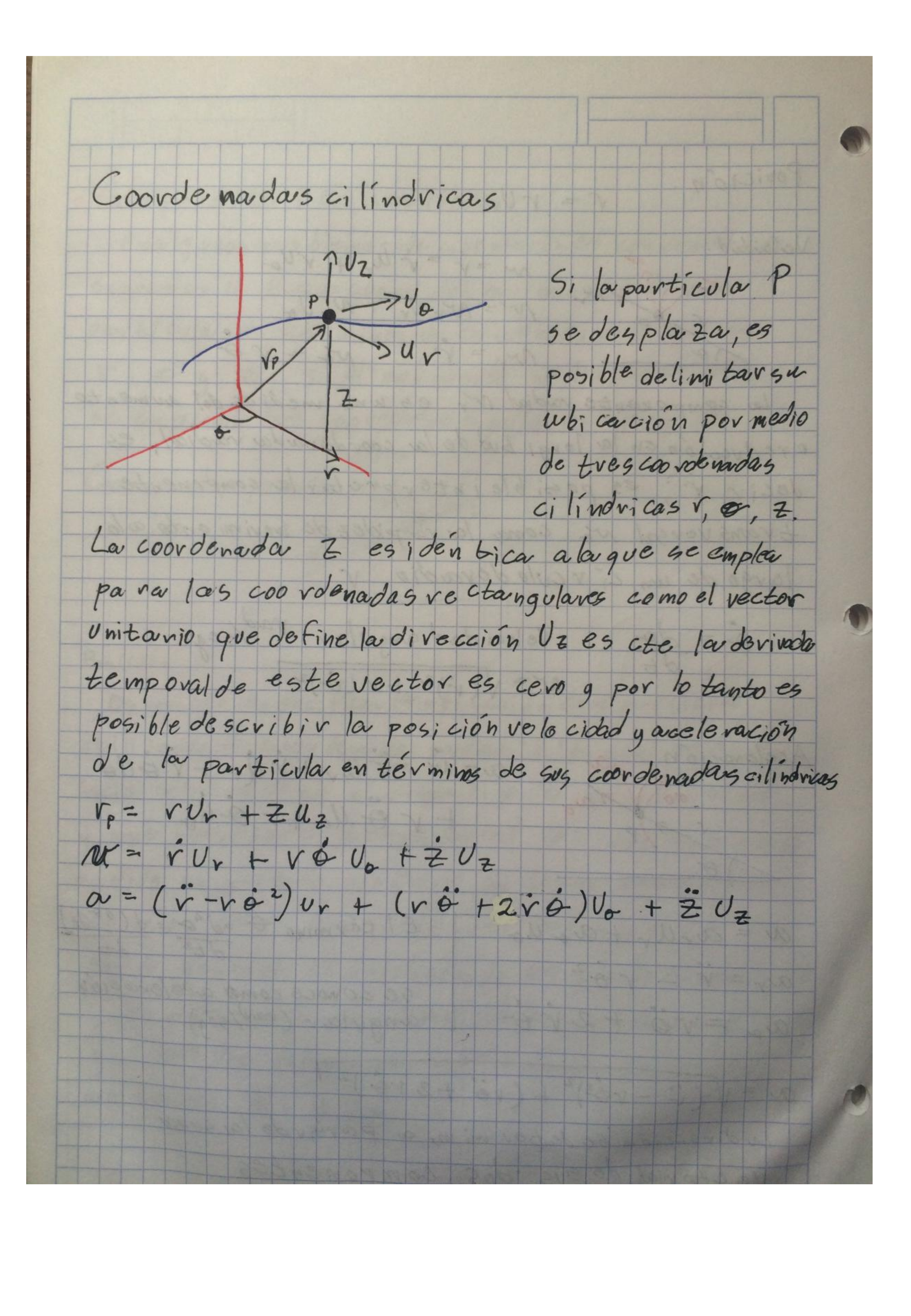
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

El término $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d(d\theta/dt)}{dt}$ se conoce como aceleración angular ($^{rad}/_{seg}$)

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$

La dirección se determina a partir de la suma vectorial de sus dos componentes



Coordenadas cilíndricas

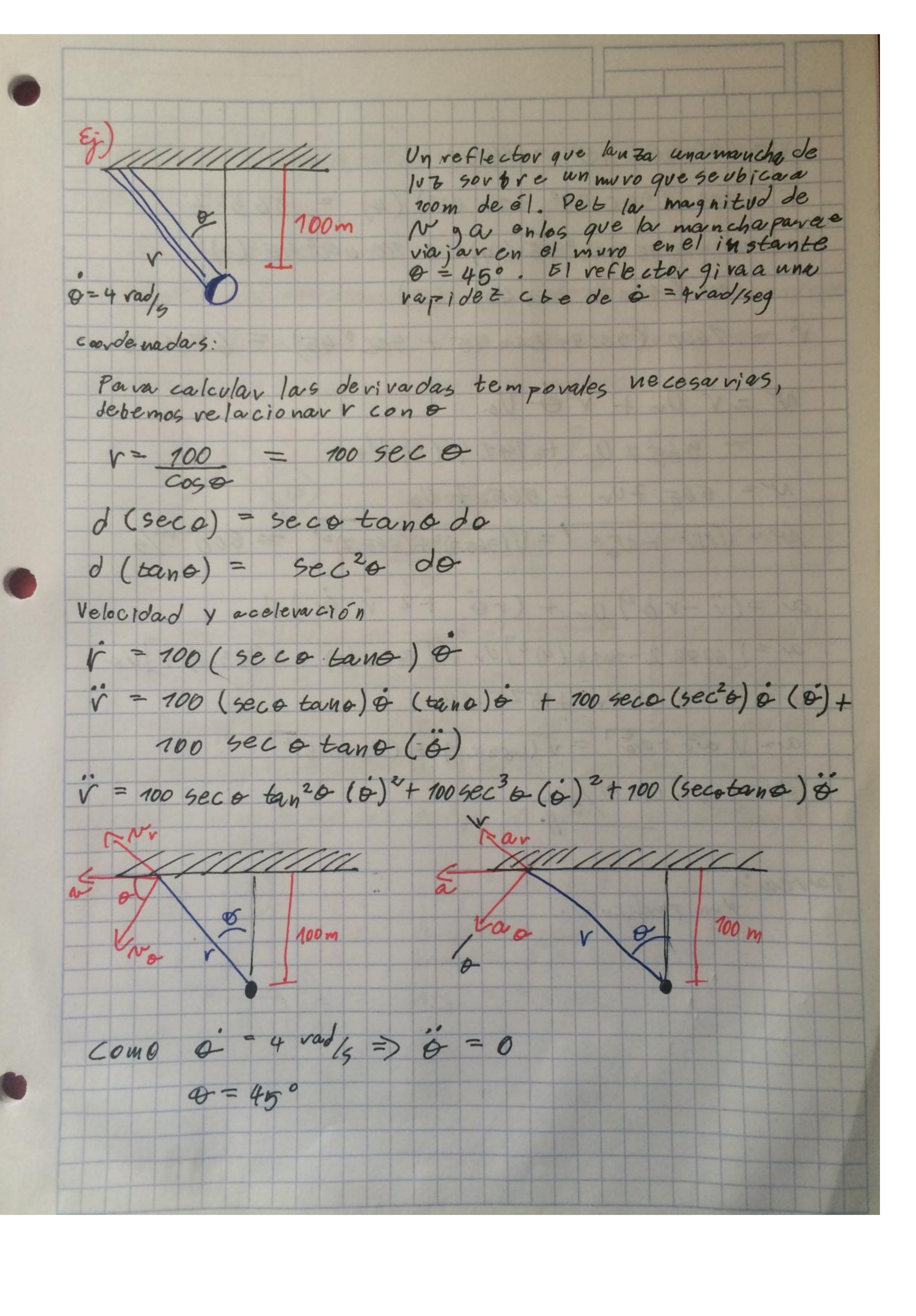
Si la partícula P se desplaza, es posible delimitar su ubicación por medio de tres coordenadas cilíndricas r, θ, z.

La coordenada z es idéntica a la que se emplea para las coordenadas rectangulares como el vector unitario que define la dirección U_z es cte la derivada temporal de este vector es cero y por lo tanto es posible describir la posición velocidad y aceleración de la partícula en términos de sus coordenadas cilíndricas

$$r_p = r U_r + z u_z$$

$$v = \dot{r} U_r + r \dot{\theta} U_\theta + \dot{z} U_z$$

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) U_\theta + \ddot{z} U_z$$



Ej)

Un reflector que lanza una mancha de luz sobre un muro que se ubica a 100m de él. Det la magnitud de v y a en los que la mancha parece viajar en el muro en el instante $\theta = 45°$. El reflector gira a una rapidez cte de $\dot{\theta} = 4$rad/seg

coordenadas:

Para calcular las derivadas temporales necesarias, debemos relacionar r con θ

$$r = \frac{100}{\cos\theta} = 100 \sec\theta$$

$$d(\sec\theta) = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

$$d(\tan\theta) = \sec^2\theta \, d\theta$$

Velocidad y aceleración

$$\dot{r} = 100(\sec\theta \cdot \tan\theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = 100(\sec\theta \tan\theta)\dot{\theta}(\tan\theta)\dot{\theta} + 100\sec\theta(\sec^2\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta}) + 100\sec\theta\tan\theta(\ddot{\theta})$$

$$\ddot{r} = 100\sec\theta\tan^2\theta(\dot{\theta})^2 + 100\sec^3\theta(\dot{\theta})^2 + 100(\sec\theta\tan\theta)\ddot{\theta}$$

Como $\dot{\theta} = 4$ rad/s $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$\theta = 45°$

$r = 100 \sec 45^\circ = 141.4$

$\dot{r} = 100 (\sec 45^\circ \tan 45^\circ)(4) = 565.7$

$\ddot{r} = 100 \sec 45 \tan^2 45 (4)^2 + 100 \sec^2 45 (4)^2$

$+ 100 (\sec 45 \tan 45)(0)$

$\ddot{r} = 1600 (\sec 45 \tan 45 + \sec^3 45) = 6788.2$

$v = \dot{r} U_r + r\dot{\theta} U_\theta$

$= 565.7 U_r + 141.4 (4) U_\theta$

$v = 565.7 U_r + 565.7 U_\theta$

$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565.7)^2 + (565.7)^2} = 800 \ m/s$

$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) U_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) U_\theta$

$a = [6788.2 - 141.4 (4)^2] U_r + [141.4 (0) + 2(565.7) 4] U_\theta$

$a = 4525.8 U_r + 4525.8 U_\theta$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525.8)^2 + (4525.8)^2}$

$a = 6400 \ m/s^2$ //

Tarea:

Una partícula....

Análisis del movimiento dependiente absoluto de las partículas:

En ciertos problemas el movimiento de una partícula dependerá del movimiento de otra. Esta dependencia ocurre si las partículas se encuentran interconectadas por correas no extensibles en torno a poleas.

S_A C D S_B A B

$L_T = S_A + l_{CD} + S_B$

velocidad

$\frac{dS_B}{dt} + \frac{dS_A}{dt} = 0 \Rightarrow v_B = -v_A$

El signo negativo indica que cuando el bloque A tiene velocidad hacia abajo, B tiene la misma pero hacia arriba.

De manera similar, la diferenciación en el tiempo en las velocidades proporciona la relación $\Rightarrow a_B = -a_A$

Ej) Determine la rapidez de A, si B tiene $v = 6$ pies/seg ↑

S_A S_B A B $6\ \frac{ft}{s}$ ↑

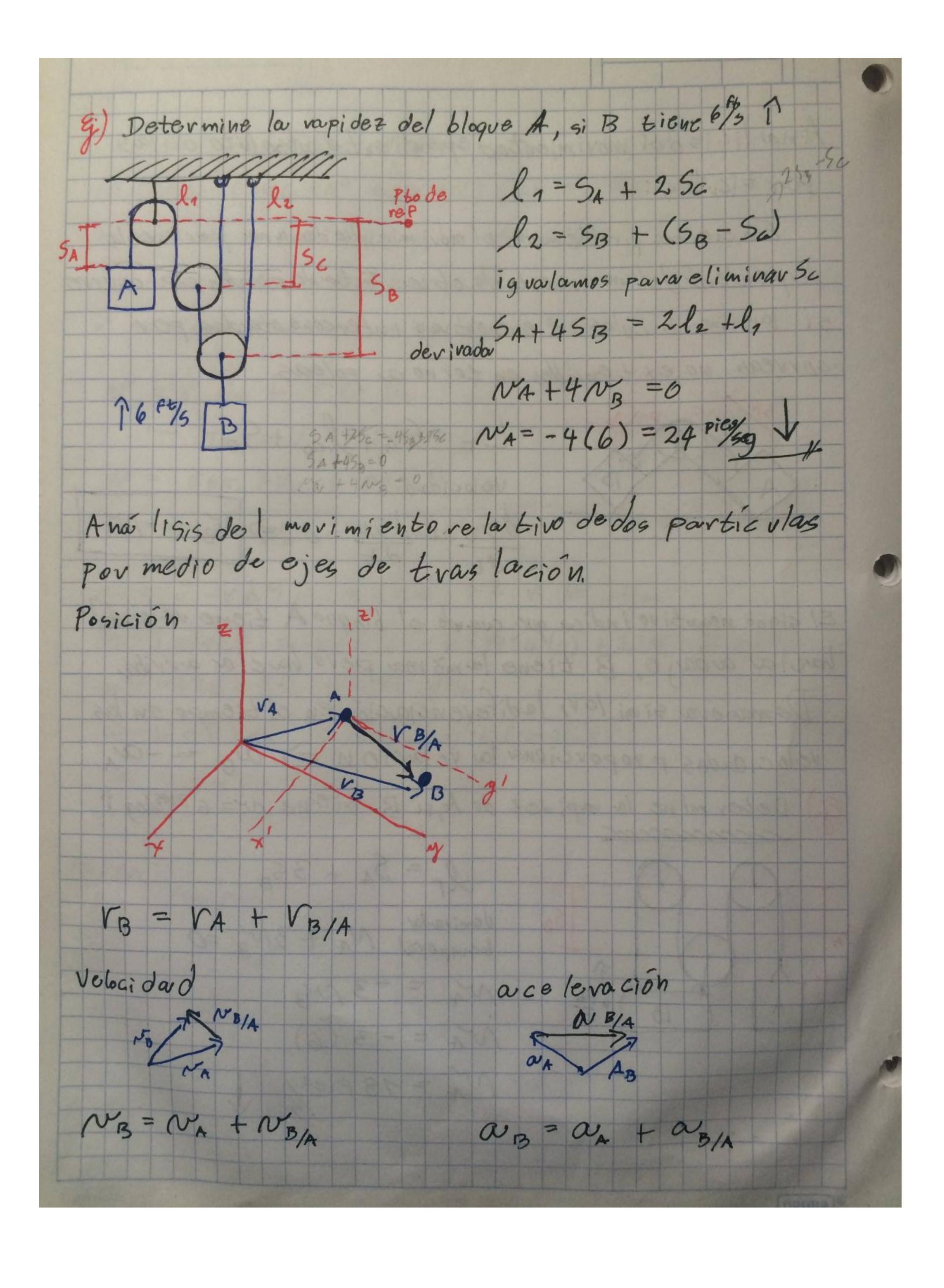
$l_T = S_A + 3S_B$

derivada temporal $v_A + 3v_B = 0$

$v_A = -3v_B$

$v_A = -3(6)$

$v_A = 18$ pies/seg ↓



ej) Determine la rapidez del bloque A, si B tiene 6 ft/s ↑

$$l_1 = S_A + 2S_C$$

$$l_2 = S_B + (S_B - S_C)$$

igualamos para eliminar S_C

$$S_A + 4S_B = 2l_2 + l_1$$

derivada

$$v_A + 4v_B = 0$$

$$v_A = -4(6) = 24 \text{ pies/seg} \downarrow$$

Análisis del movimiento relativo de dos partículas por medio de ejes de traslación.

Posición

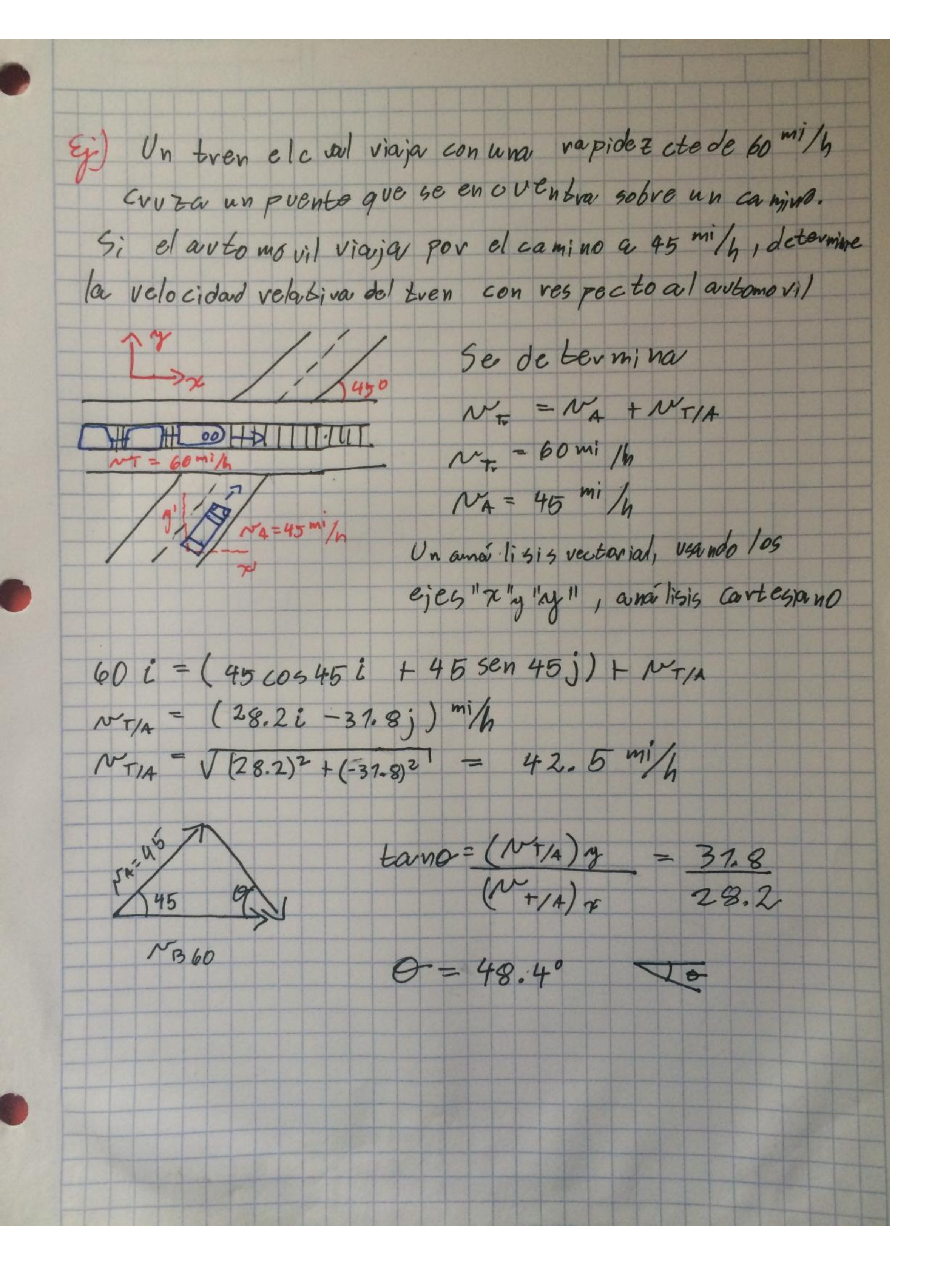
$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

Velocidad

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

aceleración

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$



Ej) Un tren el cual viaja con una rapidez cte de 60 mi/h cruza un puente que se encuentra sobre un camino. Si el automovil viaja por el camino a 45 mi/h, determine la velocidad relativa del tren con respecto al automovil

Se determina

$v_{Tr} = v_A + v_{T/A}$

$v_{Tr} = 60$ mi/h

$v_A = 45$ mi/h

Un análisis vectorial, usando los ejes "x" y "y", análisis cartesiano

$$60\,i = (45\cos 45\,i + 45\,\text{sen}\,45\,j) + v_{T/A}$$

$$v_{T/A} = (28.2i - 31.8j)\ \text{mi/h}$$

$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5\ \text{mi/h}$$

$$\tan\theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.4^\circ$$